

無限級数 $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ の視覚的な図示について

俺

2022年2月21日

概要

一般的には、自然数の総和 $1+2+3+\dots$ は無限 ∞ である。しかし、 $1+2+3+\dots$ は " $1+2+3+\dots = -\frac{1}{12}$ " とも解釈されている。この数式には、複素数や解析接続が使用される。しかし、ほとんどの民は複素数や解析接続を理解することができない。そのため、彼らはこの数式を感覚的に把握することができない。

そこで、俺は無限級数 $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ を杉山の数式 $\lim_{x \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{\infty} k^n \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{2n+2})) \cos(kx)$ と解釈した。その結果、俺は無限級数における収束値（極限值）が $x > 0$ から $x = 0$ へと近づいていくことを視覚化することができた。同時に、俺は無限級数の一部は $x = 0$ で発散することを視覚化することができた。この時、俺はなぜ " $1+2+3+\dots = -\frac{1}{12}$ " になるのかを感覚的に把握することができた。

例えば、俺が $n = 1$ とする。この時、俺は無限級数 $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ は $1+2+3+\dots$ になる。杉本の数式を使用すると、 $\lim_{x \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{\infty} k^n \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{2n+2})) \cos(kx)$ は $-\frac{1}{12}$ である。この時、視覚的な図示では、 $-\frac{1}{12}$ は $x > 0$ から $x = 0$ へと近づいていった。同時に、 $1+2+3+\dots$ は $x = 0$ で発散した。

同様に、一般化して、俺は無限級数 $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ をグラフャーでそれぞれの n について視覚化していった。その結果、ある種の n では、俺は無限級数における収束値（極限值）が $x > 0$ から $x = 0$ へと近づいていくことを視覚化することができた。同時に、俺は無限級数の一部は $x = 0$ で発散することを視覚化することができた。

目次

第 I 部	無限級数 $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ の視覚的な図示	3
1	$n = 1$ の時	3
2	$n = 2$ の時	7
3	$n = 3$ の時	11
4	$4 \leq n$ の時	15
第 II 部	$n \leq -2$ における無限級数 $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ の視覚的な図示	19
5	$n = -2$	20
6	$n = -3$	22
7	$n = -4$	24
8	$n = -5$	25
第 III 部	予想とまとめ	26
9	予想	26
10	まとめ	27

第 I 部

無限級数 $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ の視覚的な図示

以下では、俺は $1 \leq n$ における無限級数 $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ を図示するつもりである。 $n = 1$ の時、無限級数 $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ は $1 + 2 + 3 + \dots$ である。 $n = 2$ の時、無限級数 $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ は $1 + 4 + 9 + \dots$ である。 $n = 3$ の時、無限級数 $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ は $1 + 8 + 27 + \dots$ である。 $4 \leq n$ の時も、同様である。

俺は無限級数 $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ を

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{2n+2})) \cos(kx)$$

と解釈する。俺はこの数式を杉山式 [1] と呼ぶ。この時、 $1 + 2 + 3 + \dots$ は $\sum_{k=1}^{\infty} k \exp(-kx) \cos(kx)$ である。 $1 + 4 + 9 + \dots$ は $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \exp(-kx\sqrt{3}) \cos(kx)$ である。 $1 + 8 + 27 + \dots$ は $\sum_{k=1}^{\infty} k^3 \exp(-kx(1+\sqrt{2})) \cos(kx)$ である。 $4 \leq n$ の時も、同様である。

俺は x を横軸に取って、 y を縦軸に取った。さらに、俺は n を具体的に指定した。その後、俺は k を大きくしていき、それぞれの k に関するグラフの図示を獲得した。この時、俺はそれぞれの無限級数における極限值（または収束値）が $x > 0$ から $x = 0$ へと近づいていくことを視覚的に確認した。同時に、俺はそれぞれの無限級数が $x = 0$ において発散することを確認した。

1 $n = 1$ の時

$n = 1$ の時、無限級数 $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ は $1 + 2 + 3 + \dots$ である。杉山式では、 $1 + 2 + 3 + \dots$ は $\sum_{k=1}^{\infty} k \exp(-kx) \cos(kx)$ である。俺がこの杉山式における k を大きくした時、俺は $-\frac{1}{12}$ が $x > 0$ から $x = 0$ へと近づいていくことを視覚的に確認した。同時に、俺は $\sum_{k=1}^{\infty} k \exp(-kx) \cos(kx)$ が $x = 0$ において発散することを確認した。俺は次の俺の視覚的な予想

$$\lim_{+x \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{\infty} k \exp(-kx) \cos(kx) = -\frac{1}{12}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} k \exp(-k \cdot 0) \cos(k \cdot 0) = \infty$$

を提示する。始めに、俺は $k = 1$ を視覚化する。

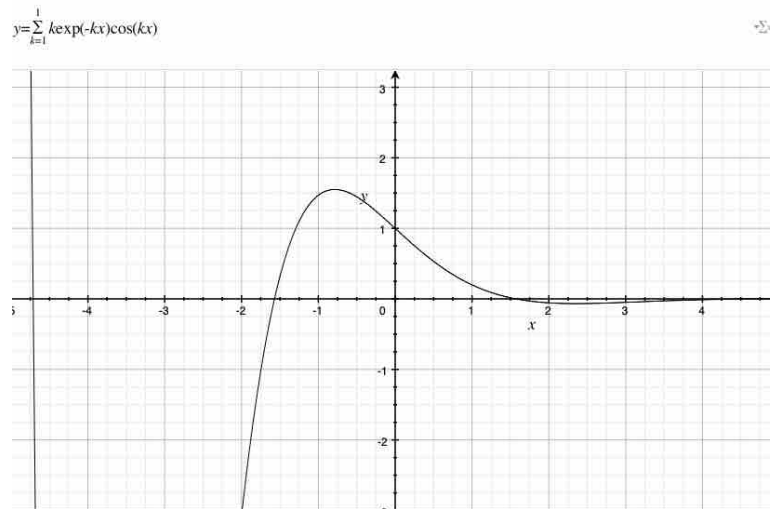


図 1

俺は図 1 を観察する。この時、杉山氏は $x = 0$ で 1 を取っている。 k が 1 のとき、 $x = 0$ における杉山式の値は 1 である。計算は次である。 k が 1 であるとき、杉山式は $1 \exp(-1x) \cos(1x)$ である。次に、俺は 0 を x に代入する。その時、俺は $1 \exp(-1 \cdot 0) \cos(1 \cdot 0)$ を獲得する。 $\exp(0)$ 及び $\cos(0)$ は 1 である。従って、 $x = 0$ における杉山式の値は 1 である。また、日常的な感覚でも、自然数の総和 $\sum_{k=1}^1$ は $1 = 1$ である。次に、俺は $k = 2$ を視覚化する。

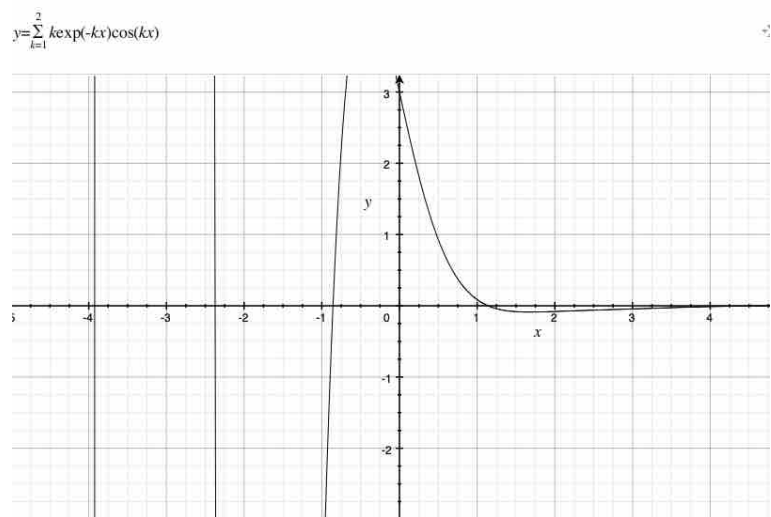


図 2

俺は図 2 を観察する。この時、杉山氏は $x = 0$ で 3 を取っている。 k が 2 のとき、 $x = 0$ における値は 3 である。計算は次である。 k が 2 であるとき、杉山式は $1 \exp(-1x) \cos(1x) + 2 \exp(-2x) \cos(2x)$ である。次に、俺は 0 を x に代入する。その時、俺は $1 \exp(-1 \cdot 0) \cos(1 \cdot 0) + 2 \exp(-2 \cdot 0) \cos(2 \cdot 0)$ を獲得する。 $\exp(0)$ 及び $\cos(0)$ は 1 である。従って、 $x = 0$ における杉山式の値は $1 + 2 = 3$ である。また、日常的な感覚でも、自

然数の総和 $\sum_{k=1}^2$ は $1 + 2 = 3$ である。同様に、俺は $k = 3$ や $k = 4$ を視覚化していく。次に、俺は $k = 10$ を取ってみる。俺は次の図を獲得する。

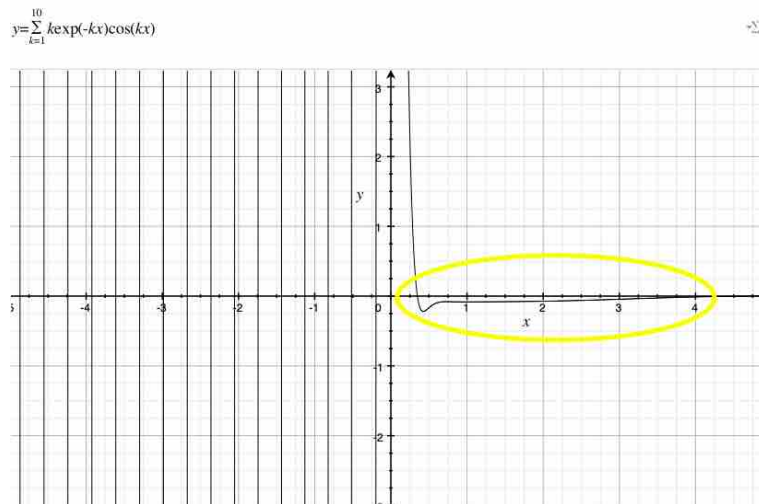


図 3

俺は図 3 を観察する。 k が 10 のとき、 $x = 0$ における値は 55 である。計算は次である。 k が 10 であるとき、杉山式は $1 \exp(-1x) \cos(1x) + 2 \exp(-2x) \cos(2x) + \dots + 10 \exp(-10x) \cos(10x)$ である。次に、俺は 0 を x に代入する。その時、俺は $1 \exp(-1 \cdot 0) \cos(1 \cdot 0) + 2 \exp(-2 \cdot 0) \cos(2 \cdot 0) \dots + 10 \exp(-10 \cdot 0) \cos(10 \cdot 0)$ を獲得する。 $\exp(0)$ 及び $\cos(0)$ は 1 である。従って、 $x = 0$ における杉山式の値は $1 + 2 + \dots + 10 = 55$ である。また、日常的な感覚でも、自然数の総和 $\sum_{k=1}^{10}$ は $1 + 2 + \dots + 10 = 55$ である。ここで、俺は黄色の楕円に着目する。 $x > 0$ における楕円の内部には、ある値が存在しているように見える。俺の予想として、もし俺が k を大きくするならば、この楕円の部分が $-\frac{1}{12}$ に近い値になるだろう。次に、俺は $k = 100$ を取ってみる。

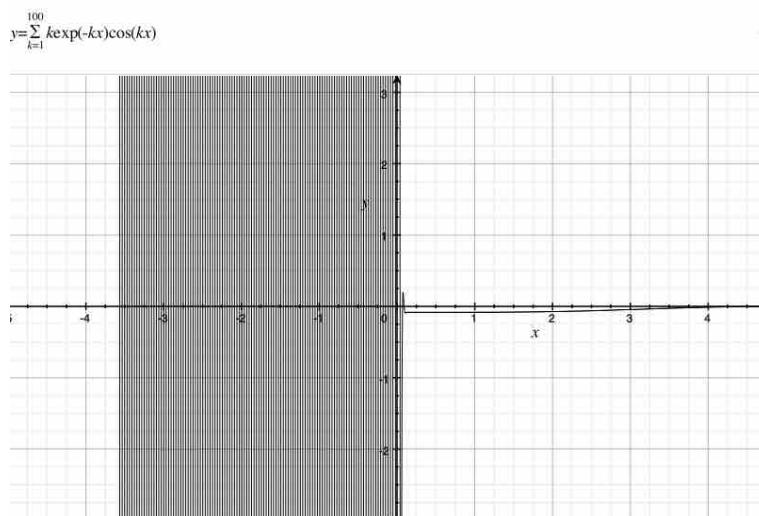


図 4

俺は図 4 を観察する。 k が 100 のとき、 $x = 0$ における値は 1 から 100 までの自然数の和 (5050?) である。俺はその値を観察することはできない。 k が 100 であるとき、杉山式は $1\exp(-1x)\cos(1x) + 2\exp(-2x)\cos(2x) + \dots + 100\exp(-100x)\cos(100x)$ である。次に、俺は 0 を x に代入する。その時、俺は $1\exp(-1 \cdot 0)\cos(1 \cdot 0) + 2\exp(-2 \cdot 0)\cos(2 \cdot 0) \dots + 100\exp(-100 \cdot 0)\cos(100 \cdot 0)$ を獲得する。 $\exp(0)$ 及び $\cos(0)$ は 1 である。従って、 $x = 0$ における杉山式の値は $1 + 2 + \dots + 100 = 5050$ である。また、日常的な感覚でも、自然数の総和 $\sum_{k=1}^{100}$ は $1 + 2 + \dots + 100 = 5050$ である。上記をみると、 x が 0 に近い範囲では、杉山式は特定の値を取っているように見える。また、一つの山がある。俺が上記を拡大して、俺は次の図 5 を獲得する。

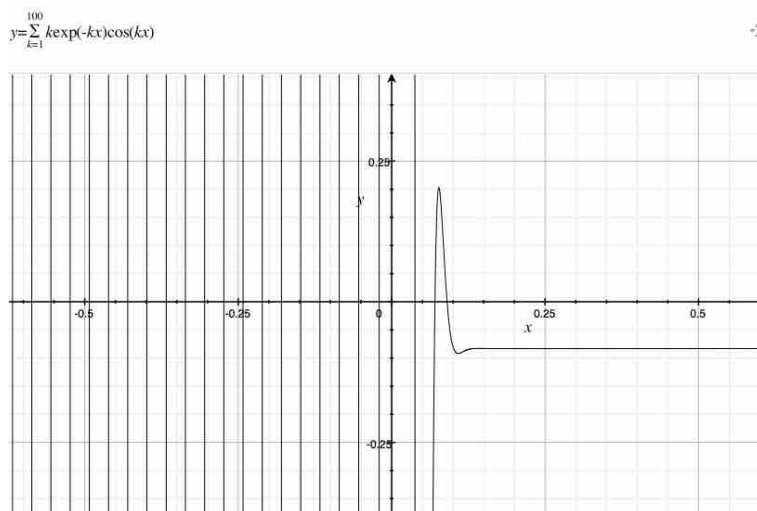


図 5

$x > 0$ における直線をとる値は $-\frac{1}{12}$ であるように感じる。そこで、俺は $y = -\frac{1}{12}$ を導入すると、俺は次の図 6 を獲得する。

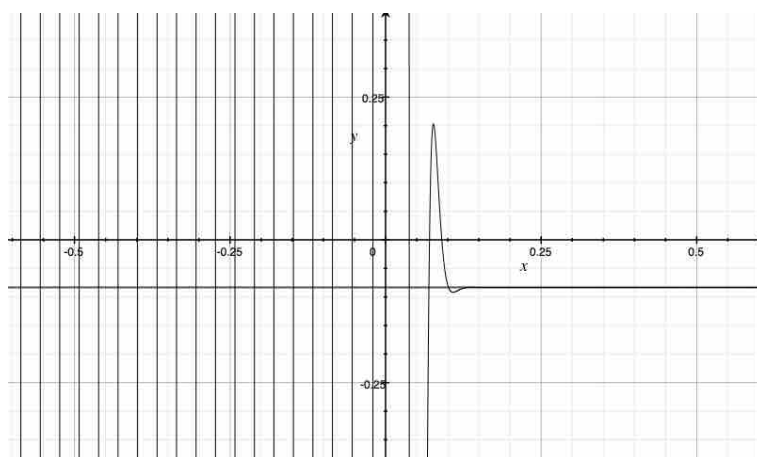


図 6

上記の直線は $y = -\frac{1}{12}$ である。 $x > 0$ における直線をとる値は約 $y = -\frac{1}{12}$ である。数学的な厳密性を捨てて、個人的な印象を提示すると、俺が k を無限にすると、もし俺が x を正から 0 へと変化させるならば、その時、 $\lim_{x \rightarrow +0}$ における杉山式の値は $y = -\frac{1}{12}$ にもなるように思える。当然、その時、自然数の総和 $\sum_{k=1}^{\infty}$ は無限である。 $k = 500$ も同様である。

k が無限のとき、 $x = 0$ における値は自然数の総和 ∞ である。俺はその値を観察することはできない。 k が無限であるとき、杉山式は $1\exp(-1x)\cos(1x) + 2\exp(-2x)\cos(2x) + \dots$ である。次に、俺は 0 を x に代入する。その時、俺は $1\exp(-1 \cdot 0)\cos(1 \cdot 0) + 2\exp(-2 \cdot 0)\cos(2 \cdot 0) \dots$ を獲得する。 $\exp(0)$ 及び $\cos(0)$ は 1 である。従って、 $x = 0$ における杉山式の値は $1 + 2 + \dots = \infty$ である。また、日常的な感覚でも、自然数の総和 $\sum_{k=1}^{\infty}$ は $1 + 2 + \dots = \infty$ である。ただし、 k が無限のとき、もし俺が 0 を x に代入せずに、 x を正から 0 へと変化させるならば、杉山式は $\lim_{x \rightarrow +0}$ における杉本式の値は $-\frac{1}{12}$ にもなるように思える。当然、上記の図によると、 $-\frac{1}{12}$ を取らない山がある。だから、もしこの山が消失しないならば、たとえ俺が x を正から 0 へと変化させるとしても、 $\lim_{x \rightarrow +0}$ における杉本式の値は $-\frac{1}{12}$ にもならないように思える。だから、上記を主張するためには、この山の除去や山の解釈が必要である。

上記をまとめると次になる。 $\sum_{k=1}^{\infty} k\exp(-kx)\cos(kx)$ の x が 0 である時、 $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ が ∞ になる。視覚的には、杉山式のグラフにおいて、 $x = 0$ における y 軸の値が無限 ∞ へと発散する。直感的には、自然数の総和は無限である。つまり、 $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ は無限 ∞ である。この視覚的な解釈は $x = 0$ における y の値が $1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, 1 + 2 + 3 + \dots$ のように $x = 0$ で大きくなることである。

$\lim_{x \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{\infty} k\exp(-kx)\cos(kx)$ が $\lim_{x \rightarrow +0}$ である時、 $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ が $-\frac{1}{12}$ になる。視覚的には、杉山式のグラフにおいて、 $x = 0$ における y 軸の値 $-\frac{1}{12}$ が $x > 0$ から 0 へと収束するように見える。ある数学者が $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ は $-\frac{1}{12}$ と言った時、俺は非常に混乱する。しかし、上記の不確かな図を使用する時、俺は $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ が $-\frac{1}{12}$ であるのはそれほどおかしくないように思える。 $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ が $\lim_{x \rightarrow +0}(1\exp(-1x)\cos(1x) + 2\exp(-2x)\cos(2x) + 3\exp(-3x)\cos(3x) + 4\exp(-4x)\cos(4x) + \dots)$ のとき、 $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ は $-\frac{1}{12}$ である可能性がある。上記の無限級数では、無限級数におけるそれぞれの数を $k\exp(-kx)\cos(kx)$ の $x = 0$ における値と解釈することができる可能性がある。その時、その級数は $-\frac{1}{12}$ になるかもしれない。一方、級数におけるそれぞれの数を自然数と解釈する時、その級数は無限へと発散する。上記の図では、上記の無限級数は発散する、かつ $-\frac{1}{12}$ になるかもしれない。個人的な印象では、上記の級数は収束しているのではなく、直感通りに発散しているように見える。一般的に、関数はある変数に対して一つの値を取っているように見える。しかし、上記では、 $x = 0$ における値は ∞ と $x > 0$ から $x = 0$ への極限值 $-\frac{1}{12}$ である。つまり、杉山式は $x = 0$ において二つの値を取っているように見える。

2 $n = 2$ の時

$n = 2$ の時、無限級数 $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ は $1 + 4 + 9 + \dots$ である。杉山式では、 $1 + 2 + 3 + \dots$ は $\sum_{k=1}^{\infty} k^2\exp(-kx\sqrt{3})\cos(kx)$ である。俺がこの杉山式における k を大きくした時、俺は 0 が $x > 0$ から $x = 0$ へと近づいていくことを視覚的に確認した。同時に、俺は $\sum_{k=1}^{\infty} k^2\exp(-kx\sqrt{3})\cos(kx)$ が $x = 0$ において発散することを確認した。俺は次の俺の視覚的な予想

$$\lim_{x \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{\infty} k^2\exp(-kx\sqrt{3})\cos(kx) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \exp(-k \cdot 0 \cdot \sqrt{3}) \cos(k \cdot 0 \cdot \sqrt{3}) = \infty$$

を提示する。始めに、俺は $k = 1$ を視覚化する。

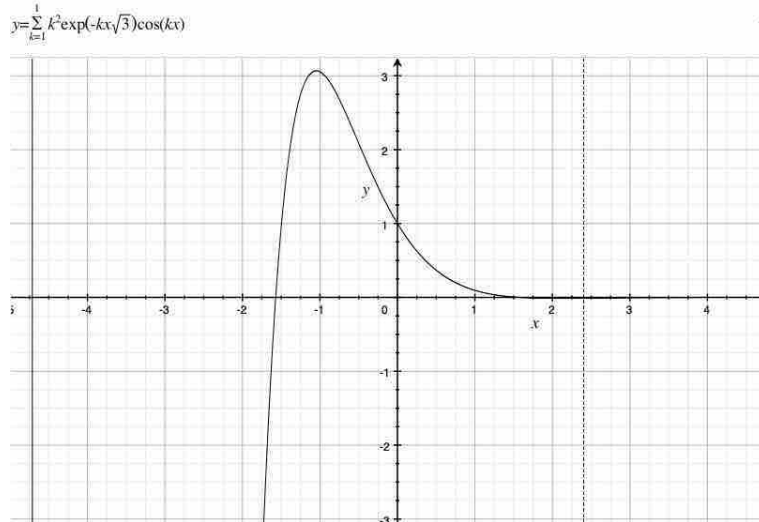


図 7

上記の図 7 を見ると、 $x = 0$ における杉山式の値は 1 である。 k が 1 のとき、 $x = 0$ における杉山式の値は 1 である。計算は次である。 k が 1 であるとき、杉山式は $1^2 \exp(-1x\sqrt{3}) \cos(1x)$ である。次に、俺は 0 を x に代入する。その時、俺は $1^2 \exp(-1 \cdot 0 \cdot \sqrt{3}) \cos(1 \cdot 0)$ を獲得する。従って、 $x = 0$ における杉山式の値は 1 である。また、日常的な感覚でも、自然数の総和 $\sum_1^1 k^2$ は $1 = 1$ である。次に、俺は $k = 2$ を視覚化してみよう。

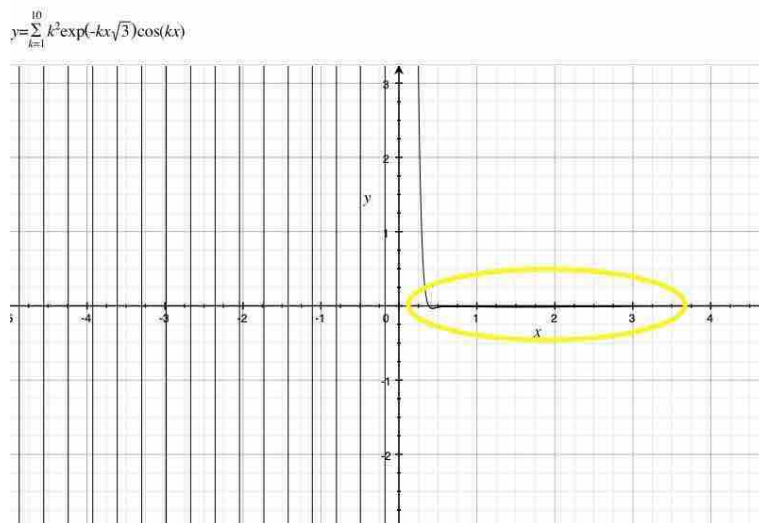


図 8

上記の図8を見ると、 $x = 0$ における杉山式の値は5である。 k が2のとき、 $x = 0$ における値は5である。計算は次である。 k が2であるとき、杉山式は $1^2 \exp(-1x\sqrt{3})\cos(1x) + 2^2 \exp(-2x\sqrt{3})\cos(2x)$ である。次に、俺は0を x に代入する。その時、俺は $1^2 \exp(-1 \cdot 0 \cdot \sqrt{3})\cos(1 \cdot 0) + 2^2 \exp(-2 \cdot 0 \cdot \sqrt{3})\cos(2 \cdot 0)$ を獲得する。従って、 $x = 0$ における杉山式の値は $1 + 2^2 = 5$ である。また、日常的な感覚でも、自然数の総和 $\sum_1^2 k^2$ は $1 + 2^2 = 5$ である。同様に、俺は $k = 3$ や $k = 4$ を視覚化していく。次に、俺は $k = 10$ を取ってみる。俺は次の図9を獲得する。

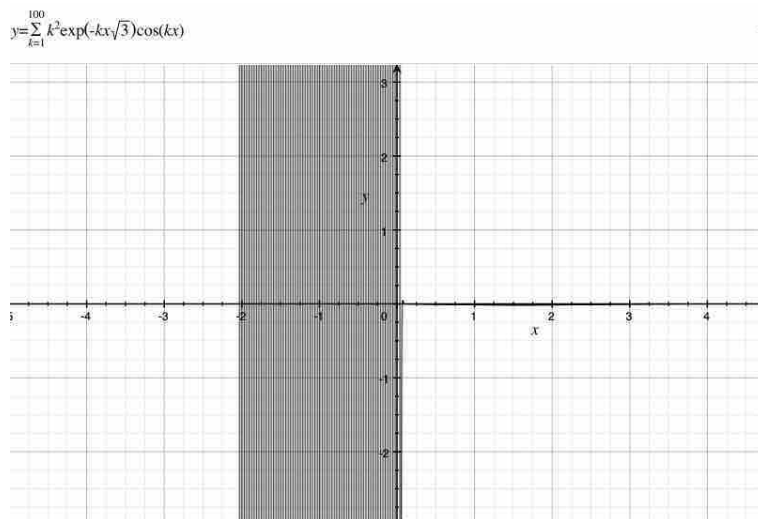


図9

上記の図9を見ると、 $x = 0$ における杉山式の値は見当たらない。 k が10のとき、 $x = 0$ における値は385である。計算は次である。 k が10であるとき、杉山式は $1^2 \exp(-1x\sqrt{3})\cos(1x) + 2^2 \exp(-2x\sqrt{3})\cos(2x) + \dots + 10^2 \exp(-10x\sqrt{3})\cos(10x)$ である。次に、俺は0を x に代入する。その時、俺は $1^2 \exp(-1 \cdot 0 \cdot \sqrt{3})\cos(1 \cdot 0) + 2^2 \exp(-2 \cdot 0 \cdot \sqrt{3})\cos(2 \cdot 0) + \dots + 10^2 \exp(-10 \cdot 0 \cdot \sqrt{3})\cos(10 \cdot 0)$ を獲得する。従って、 $x = 0$ における杉山式の値は $1^2 + 2^2 + \dots + 10^2 = 385$ である。また、日常的な感覚でも、自然数の総和 $\sum_{k=1}^{10} k^2$ は $1^2 + 2^2 + \dots + 10^2 = 385$ である。ここで、俺は黄色の楕円に着目する。 $x > 0$ における楕円の内部には、ある値が存在しているように見える。俺の予想として、もし俺が k を大きくするならば、この楕円の部分が0に近い値になるだろう。次に、俺は $k = 100$ を取ってみる。

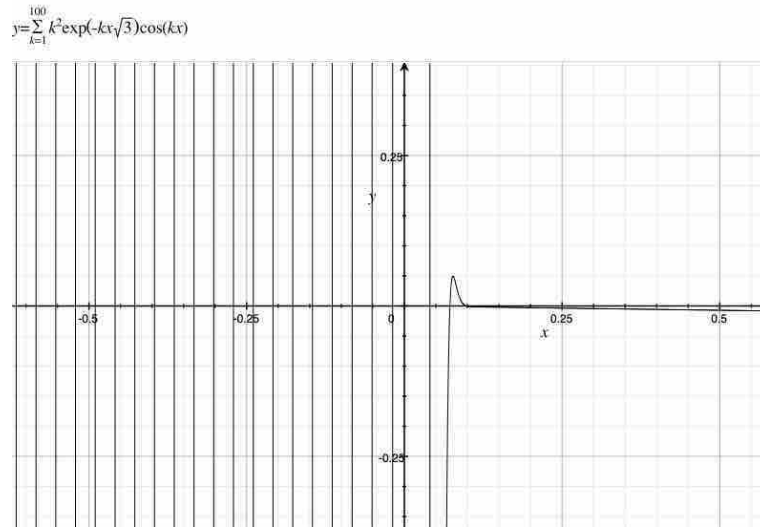


図 10

上記の図 10 を見ると、 $x = 0$ における杉山式の値は見当たらない。 k が 100 のとき、 $x = 0$ における値は 1 から 100 までの平方数の和である。俺はその値を観察することはできない。 k が 100 であるとき、杉山式は $1^2 \exp(-1x\sqrt{3}) \cos(1x) + 2^2 \exp(-2x\sqrt{3}) \cos(2x) + \dots + 100^2 \exp(-100x\sqrt{3}) \cos(100x)$ である。次に、俺は 0 を x に代入する。その時、俺は $1^2 \exp(-1 \cdot 0 \cdot \sqrt{3}) \cos(1 \cdot 0) + 2^2 \exp(-2 \cdot 0 \cdot \sqrt{3}) \cos(2 \cdot 0) \dots + 100^2 \exp(-100 \cdot 0 \cdot \sqrt{3}) \cos(100 \cdot 0)$ を獲得する。従って、 $x = 0$ における杉山式の値は $1^2 + 2^2 + \dots + 100^2$ である。また、日常的な感覚でも、自然数の総和 $\sum_{k=1}^{100} k^2$ は $1^2 + 2^2 + \dots + 100^2$ である。上記をみると、 x が 0 に近い範囲では、杉山式は特定の値を取っているように見える。また、一つの非常に小さな山がある。俺が上記を拡大して、俺は次の図 11 を獲得する。

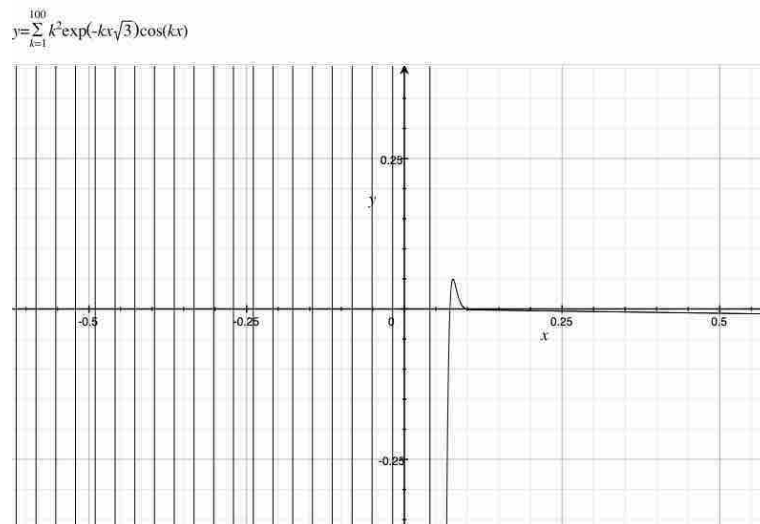


図 11

$x > 0$ における直線をとる値は 0 であるように感じる。数学的な厳密性を捨てて、個人的な印象を提示する

と、俺が k を無限にするとき、もし俺が x を正から 0 へと変化させるならば、その時、 $\lim(x \rightarrow +0)$ における杉山式の値は 0 にもなるように思える。当然、その時、自然数の総和 $\sum_1^\infty k^2$ は無限である。 k が無限のとき、 $x = 0$ における値は自然数の総和 ∞ である。俺はその値を観察することはできない。 k が無限であるとき、杉山式は $1^2 \exp(-1x\sqrt{3})\cos(1x) + 2^2 \exp(-2x\sqrt{3})\cos(2x) + \dots$ である。次に、俺は 0 を x に代入する。その時、俺は $1^2 \exp(-1 \cdot 0 \cdot \sqrt{3})\cos(1 \cdot 0) + 2^2 \exp(-2 \cdot 0 \cdot \sqrt{3})\cos(2 \cdot 0) \dots$ を獲得する。従って、 $x = 0$ における杉山式の値は $1^2 + 2^2 + \dots = \infty$ である。また、日常的な感覚でも、自然数の総和 $\sum_1^\infty k^2$ は $1^2 + 2^2 + \dots = \infty$ である。

k が無限のとき、もし俺が 0 を x に代入せずに、 x を正から 0 へと変化させるならば、杉山式は $\lim_+ x \rightarrow +0$ における杉山式の値は 0 にもなるように思える。当然、上記の図によると、 0 を取らない山がある。だから、もしこの山が消失しないならば、たとえ俺が x を正から 0 へと変化させるとしても、 $\lim_+ x \rightarrow +0$ における杉山式の値は 0 にもならないように思える。だから、上記を主張するためには、この山の除去や山の解釈が必要である。または、上記を主張するためには、この最も 0 に近い山や波それ自体が 0 になることが必要である。

まとめは省略する。

3 $n = 3$ の時

$n = 3$ の時、無限級数 $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ は $1 + 8 + 27 + \dots$ である。杉山式では、 $1 + 2 + 3 + \dots$ は $\sum_{k=1}^\infty k^3 \exp(-kx(1 + \sqrt{2}))\cos(kx)$ である。俺がこの杉山式における k を大きくした時、俺は $\frac{1}{120}$ が $x > 0$ から $x = 0$ へと近づいていくことを視覚的に確認した。同時に、俺は $\sum_{k=1}^\infty k^3 \exp(-kx(1 + \sqrt{2}))\cos(kx)$ が $x = 0$ において発散することを確認した。俺は次の俺の視覚的な予想

$$\lim_{+x \rightarrow +0} \sum_{k=1}^\infty k^3 \exp(-kx(1 + \sqrt{2}))\cos(kx) = 0$$

$$\sum_{k=1}^\infty k^2 \exp(-k \cdot 0 \cdot (1 + \sqrt{2}))\cos(k \cdot 0 \cdot (1 + \sqrt{2})) = \infty$$

を提示する。始めに、俺は $k = 1$ を視覚化する。

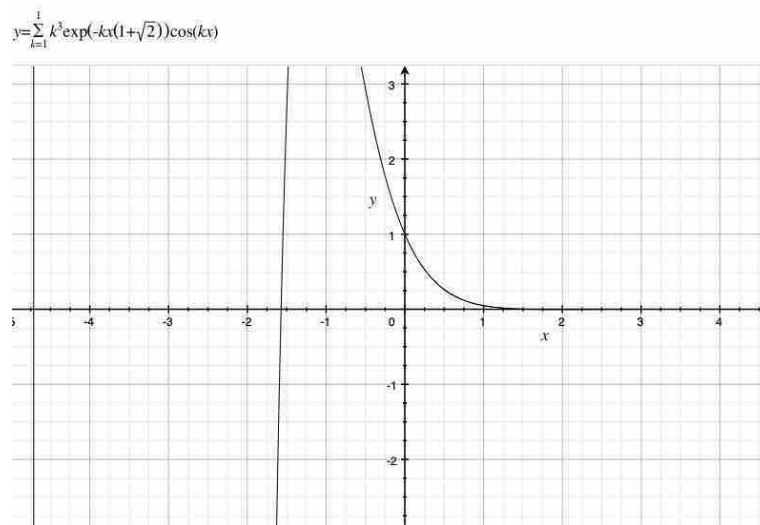


図 12

k が 1 のとき、 $x = 0$ における杉山式の値は 1 である。計算は次である。 k が 1 であるとき、杉山式は $1^3 \exp(-1x(1 + \sqrt{2})) \cos(1x)$ である。次に、俺は 0 を x に代入する。その時、俺は $1^3 \exp(-1 \cdot 0 \cdot (1 + \sqrt{2})) \cos(1 \cdot 0)$ を獲得する。 $x = 0$ における杉山式の値は 1 である。また、日常的な感覚でも、自然数の総和 $\sum_{k=1}^1$ は $1^3 = 1$ である。次に、俺は $k = 2$ を視覚化してみよう。

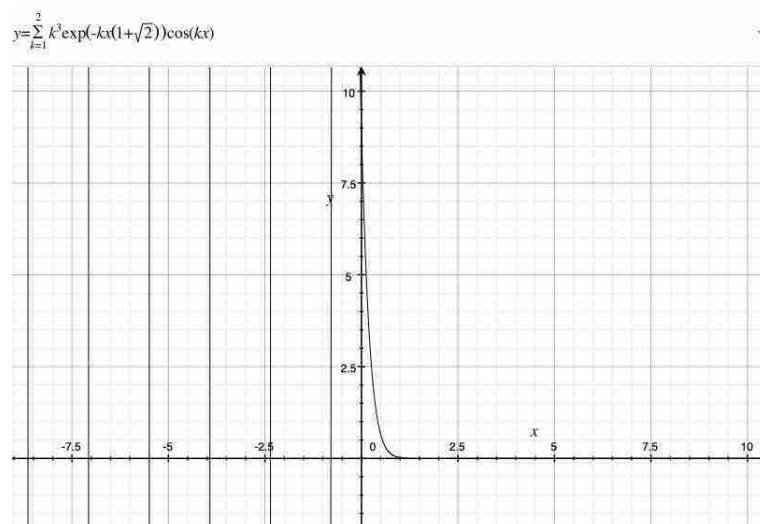


図 13

k が 2 のとき、 $x = 0$ における値は 9 である。計算は次である。 k が 2 であるとき、杉山式は $1^3 \exp(-1x(1 + \sqrt{2})) \cos(1x) + 2^3 \exp(-2x(1 + \sqrt{2})) \cos(2x)$ である。次に、俺は 0 を x に代入する。その時、俺は $1^3 \exp(-1 \cdot 0 \cdot (1 + \sqrt{2})) \cos(1 \cdot 0) + 2^3 \exp(-2 \cdot 0 \cdot (1 + \sqrt{2})) \cos(2 \cdot 0)$ を獲得する。 $x = 0$ における杉山式の値は $1^3 + 2^3 = 9$ である。また、日常的な感覚でも、自然数の総和 $\sum_{k=1}^2$ は $1^3 + 2^3 = 9$ である。同様に、俺は $k = 3$ や $k = 4$ を視覚化していく。次に、俺は $k = 10$ を取ってみる。俺は次の図を獲得する。

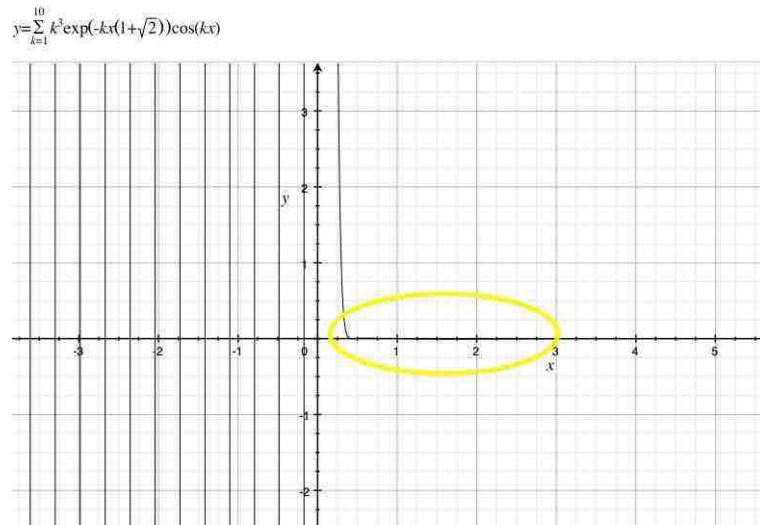


図 14

k が 10 のとき、 $x = 0$ における値は $1^3 + \dots + 10^3$ である。計算は次である。 k が 10 であるとき、杉山式は $1^3 \exp(-1x(1+\sqrt{2})) \cos(1x) + 2^3 \exp(-2x(1+\sqrt{2})) \cos(2x) + \dots + 10^3 \exp(-10x(1+\sqrt{2})) \cos(10x)$ である。次に、俺は 0 を x に代入する。その時、俺は $1^3 \exp(-1 \cdot 0 \cdot (1+\sqrt{2})) \cos(1 \cdot 0) + 2^3 \exp(-2 \cdot 0 \cdot (1+\sqrt{2})) \cos(2 \cdot 0) \dots + 10^3 \exp(-10 \cdot 0 \cdot (1+\sqrt{2})) \cos(10 \cdot 0)$ を獲得する。 $x = 0$ における杉山式の値は $1^3 + 2^3 + \dots + 10^3$ である。また、日常的な感覚でも、自然数の総和 $\sum_{k=1}^{10} k$ は $1^3 + 2^3 + \dots + 10^3$ である。ここで、俺は黄色の楕円に着目する。 $x > 0$ における楕円の内部には、ある値が存在しているように見える。俺の予想として、もし俺が k を大きくするならば、この楕円の部分が $\frac{1}{120}$ に近い値になるだろう。俺は上記の図を拡大して、 $y = \frac{1}{120}$ を導入する。

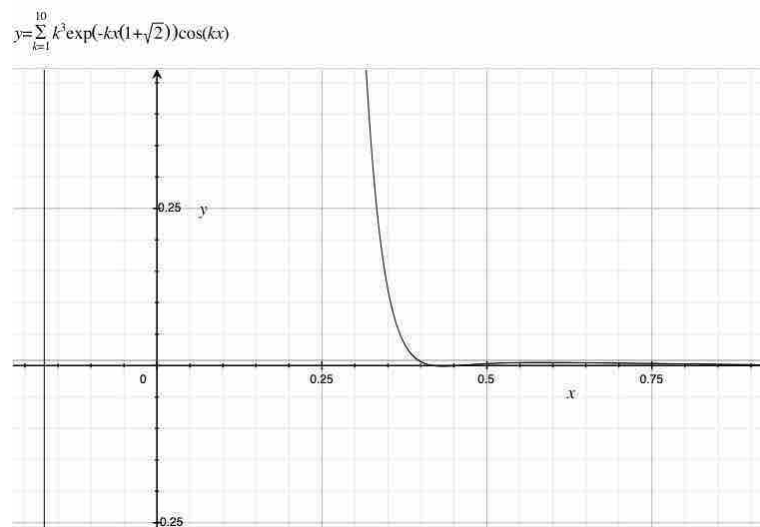


図 15

薄い直線が $y = \frac{1}{120}$ である。上記は非常に見づらいが、 $x > 0.5$ の時、杉山式はある 0 でないある値を取っ

ているように見える。次に、俺は $k = 100$ を取ってみる。

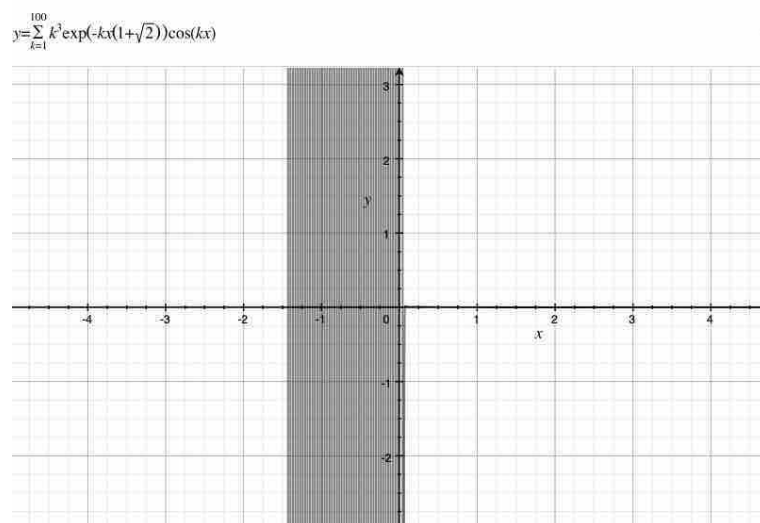


図 16

k が 100 のとき、 $x = 0$ における値は 1 から 100 までの立方数の和である。俺はその値を観察することはできない。 k が 100 であるとき、杉山式は $1^3 \exp(-1x(1+\sqrt{2})) \cos(1x) + 2^3 \exp(-2x(1+\sqrt{2})) \cos(2x) + \dots + 100^3 \exp(-100x(1+\sqrt{2})) \cos(100x)$ である。次に、俺は 0 を x に代入する。その時、俺は $1^3 \exp(-1 \cdot 0 \cdot (1+\sqrt{2})) \cos(1 \cdot 0) + 2^3 \exp(-2 \cdot 0 \cdot (1+\sqrt{2})) \cos(2 \cdot 0) + \dots + 100^3 \exp(-100 \cdot 0 \cdot (1+\sqrt{2})) \cos(100 \cdot 0)$ を獲得する。 $x = 0$ における杉山式の値は $1^3 + 2^3 + \dots + 100^3$ である。また、日常的な感覚でも、自然数の総和 $\sum_{k=1}^{100} k^3$ は $1^3 + 2^3 + \dots + 100^3$ である。上記をみると、 x が 0 に近い範囲では、杉山式は特定の値を取っているように見える。また、一つの非常に小さな山がある。俺が上記を拡大して、俺は次の図を獲得する。

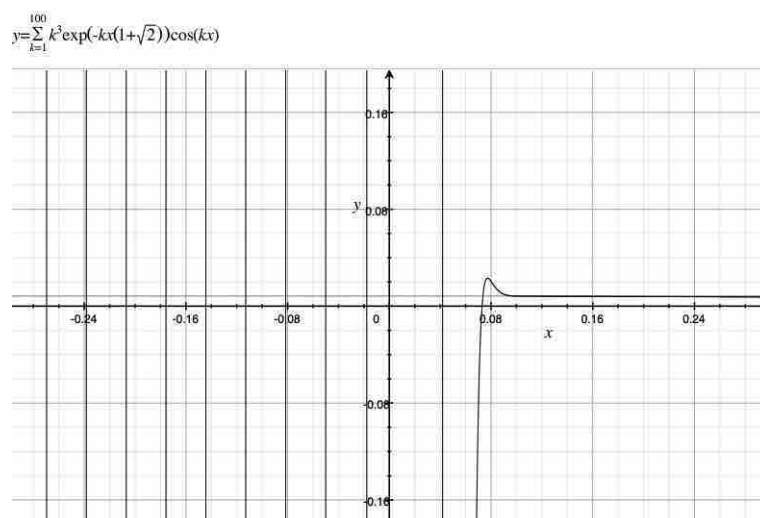


図 17

薄い線が $y = \frac{1}{120}$ である。上記は非常に見づらいが、 $x > 0.08$ の時、杉山式はある 0 でないある値 $y = \frac{1}{120}$

を取っているように見える。 $x > 0$ における直線をとる値は $\frac{1}{120}$ であるように感じる。数学的な厳密性を捨てて、個人的な印象を提示すると、俺が k を無限にするとき、もし俺が x を正から 0 へと変化させるならば、その時、 $\lim_{x \rightarrow +0}$ における杉山式の値は $\frac{1}{120}$ にもなるように思える。その時、自然数の総和 $\sum_{k=1}^{\infty} k^3$ は無限である。

k が無限のとき、 $x = 0$ における値は自然数の総和 ∞ である。俺はその値を観察することはできない。 k が無限であるとき、杉山式は $1^3 \exp(-1x(1 + \sqrt{2})) \cos(1x) + 2^3 \exp(-2x(1 + \sqrt{2})) \cos(2x) + \dots$ である。次に、俺は 0 を x に代入する。その時、俺は $1^3 \exp(-1 \cdot 0 \cdot (1 + \sqrt{2})) \cos(1 \cdot 0) + 2^3 \exp(-2 \cdot 0 \cdot (1 + \sqrt{2})) \cos(2 \cdot 0) + \dots$ を獲得する。 $x = 0$ における杉山式の値は $1^3 + 2^3 + \dots = \infty$ である。また、日常的な感覚でも、自然数の総和 $\sum_{k=1}^{\infty} k^3$ は $1^3 + 2^3 + \dots = \infty$ である。ただし、 k が無限のとき、もし俺が 0 を x に代入せずに、 x を正から 0 へと変化させるならば、杉山式は $\lim_{x \rightarrow +0}$ における杉山式の値は $\frac{1}{120}$ にもなるように思える。当然、上記の図によると、 $\frac{1}{120}$ を取らない山がある。だから、もしこの山が消失しないならば、たとえ俺が x を正から 0 へと変化させるとしても、 $\frac{1}{120}$ における杉山式の値は $\frac{1}{120}$ にもならないように思える。だから、上記を主張するためには、この山の除去や山の解釈が必要である。または、上記を主張するためには、この最も $x = 0$ に近い山や波それ自体が $\frac{1}{120}$ になることが必要である。

4 $4 \leq n$ の時

以下では、俺はこれらを一般化して、 $n = 4$ 以上の $1^n + 2^n + 3^n \dots$ について述べるつもりである。

俺の視覚的な予想

$$\lim_{+x \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{\infty} k^4 \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{10})) \cos(kx) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^4 \exp(-k \cdot 0 \cdot \cot(\frac{\pi}{10})) \cos(k \cdot 0) = \infty$$

まず、俺は $n = 4$ を視覚化する。俺は k を $k = 100$ とする。 $\sum_{k=1}^{100} k^4 \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{10})) \cos(kx)$ である。

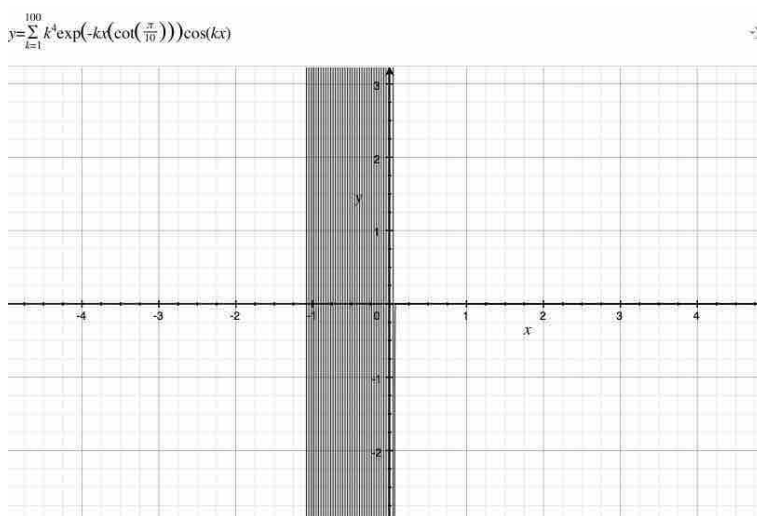


図 18

上記を見ると、 $\sum_{k=1}^{100} k^4 \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{10})) \cos(kx)$ は 0 に $x > 0$ から $x = 0$ へと収束するように見える。俺は上記の図を拡大してみる。

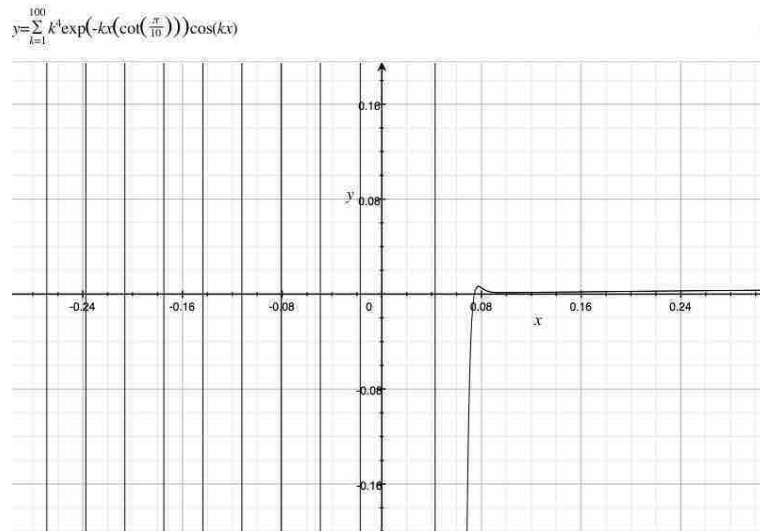


図 19

$x = 0.08$ において、小さな山がある。俺の印象では、 $\sum_{k=1}^{\infty} k^4 \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{10})) \cos(kx)$ は 0 に $x > 0$ から $x = 0$ へと収束するように見える。

俺の視覚的な予想

$$\lim_{+x \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{\infty} k^5 \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{12})) \cos(kx) = ?$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^5 \exp(-k \cdot 0 \cdot \cot(\frac{\pi}{12})) \cos(k \cdot 0) = \infty$$

次に、俺は $n = 5$ を視覚化する。俺は k を $k = 100$ とする。 $\sum_{k=1}^{100} k^5 \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{12})) \cos(kx)$ である。

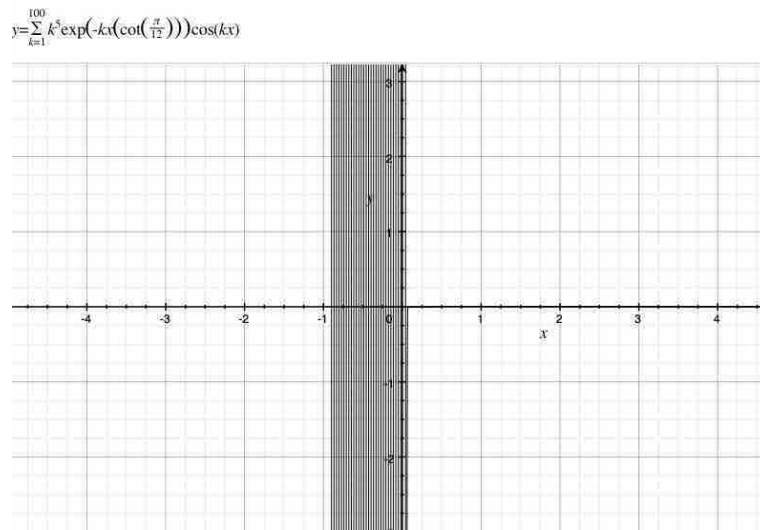


図 20

上記を見ると、 $\sum_{k=1}^{100} k^5 \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{12})) \cos(kx)$ は 0 に $x > 0$ から $x = 0$ に近い負の値へと収束するように見える。俺は上記の図を拡大してみる。

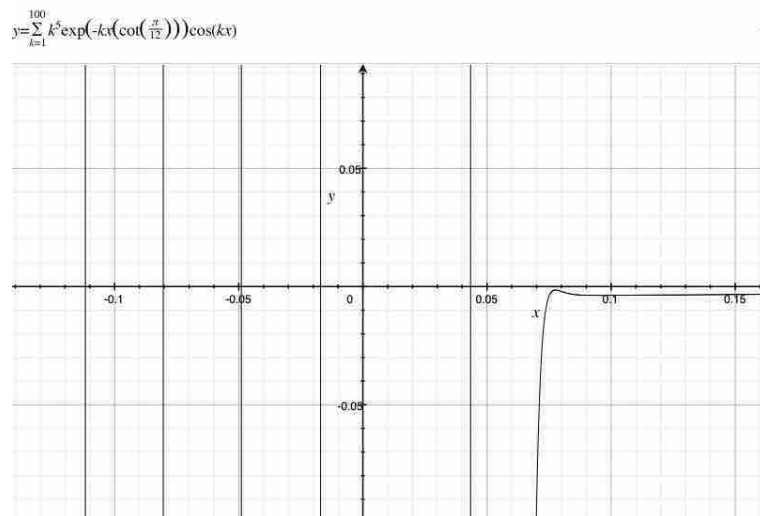


図 21

俺の印象では、 $\sum_{k=1}^{100} k^5 \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{12})) \cos(kx)$ は 0 に $x > 0$ から $x = 0$ に近い負の値へと収束するように見える。

俺の視覚的な予想

$$\lim_{+x \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{\infty} k^6 \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{14})) \cos(kx) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^6 \exp(-k \cdot 0 \cdot \cot(\frac{\pi}{14})) \cos(k \cdot 0) = \infty$$

次に、俺は $n = 6$ を視覚化する。俺は k を $k = 100$ とする。 $\sum_{k=1}^{100} k^6 \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{14})) \cos(kx)$ である。

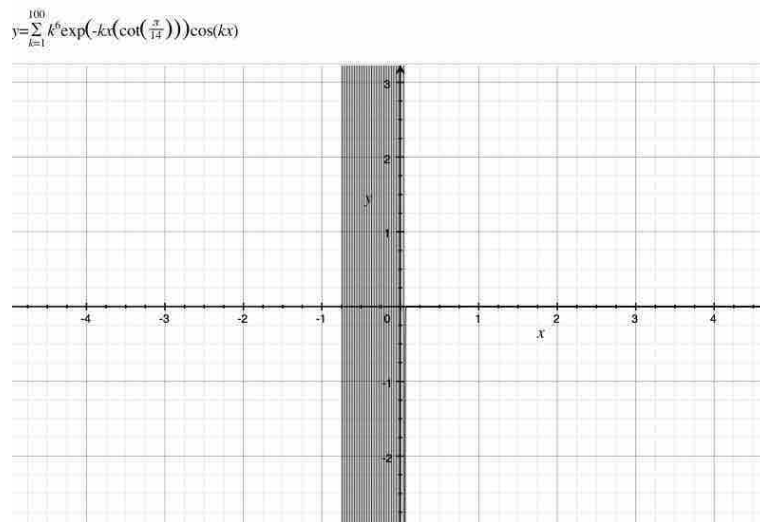


図 22

上記を見ると、 k を無限にすると、 $\sum_{k=1}^{100} k^6 \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{14})) \cos(kx)$ は 0 に $x > 0$ から $x = 0$ に近い値へと収束するように見える。俺は上記の図を拡大してみる。

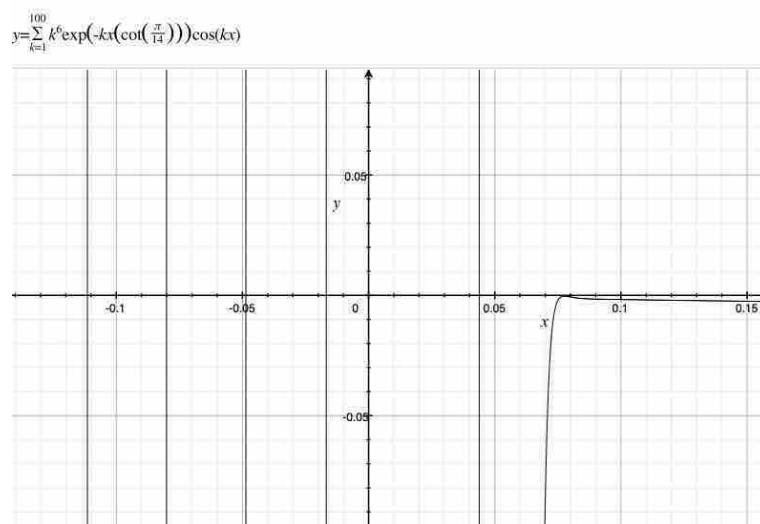


図 23

俺の印象では、 k を無限にすると、 $\sum_{k=1}^{100} k^6 \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{14})) \cos(kx)$ は 0 に $x > 0$ から $x = 0$ 、または 0 に近い負の値へと収束するように見える。

俺の視覚的な予想

$$\lim_{+x \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{\infty} k^7 \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{16})) \cos(kx) = ?$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^7 \exp(-k \cdot 0 \cdot \cot(\frac{\pi}{16})) \cos(k \cdot 0) = \infty$$

次に、俺は $n = 7$ を視覚化する。俺は k を $k = 100$ とする。 $\sum_{k=1}^{100} k^7 \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{16})) \cos(kx)$ である。

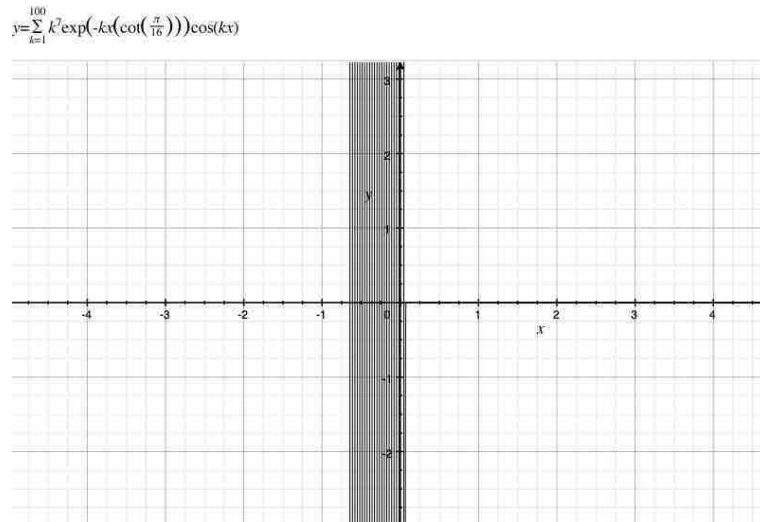


図 24

上記を見ると、 $\sum_{k=1}^{100} k^7 \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{16})) \cos(kx)$ は 0 に $x > 0$ から $x = 0$ に近い値へと収束するように見える。俺は上記の図を拡大してみる。

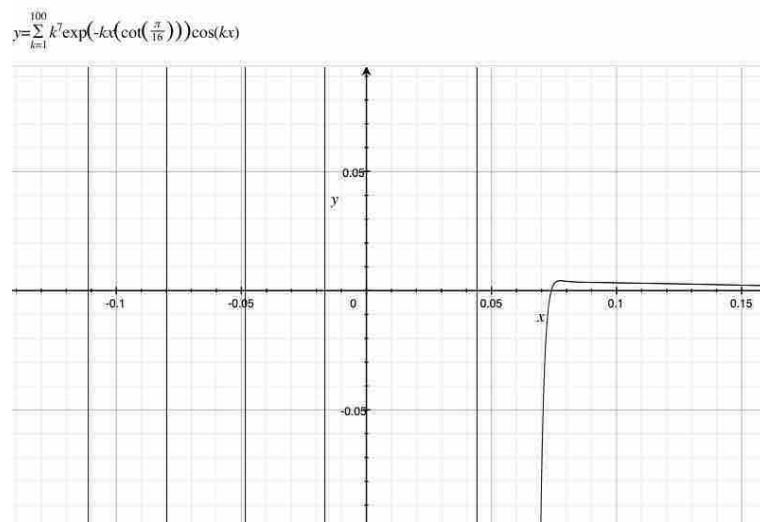


図 25

俺の印象では、 $\lim_{x \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{100} k^7 \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{16})) \cos(kx)$ は 0 に $x > 0$ から $x = 0$ 、または 0 に近い正の値へと収束するように見える。

第II部

$n \leq -2$ における無限級数 $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ の視覚的な図示

以下では、俺は $n \leq -2$ における無限級数 $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ を図示するつもりである。 $n = -2$ の時、無限級数 $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ は $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \dots$ である。 $n = -3$ の時、無限級数 $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ は $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} \dots$ である。 $n = -4$ の時、無限級数 $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ は $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} \dots$ である。 $n = -5$ の時、無限級数 $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ は $\frac{1}{1^5} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} \dots$ である。

俺は無限級数 $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ を

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{2n+2})) \cos(kx)$$

と解釈する。俺はこの数式を杉山式 [1] と呼ぶ。この時、 $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \dots$ は $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \exp(-k \cdot 0 \cdot \cot(\frac{\pi}{2})) \cos(k \cdot 0)$ である。 $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} \dots$ は $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} \exp(-k \cdot 0 \cdot \cot(\frac{\pi}{4})) \cos(k \cdot 0)$ である。 $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} \dots$ は $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} \exp(-k \cdot 0 \cdot \cot(\frac{\pi}{6})) \cos(k \cdot 0)$ である。 $\frac{1}{1^5} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} \dots$ は $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-5} \exp(-k \cdot 0 \cdot \cot(\frac{\pi}{8})) \cos(k \cdot 0)$ である。

俺は x を横軸に取って、 y を縦軸に取った。さらに、俺は n を具体的に指定した。その後、俺は k を大きくしていき、それぞれの k に関するグラフの図示を獲得した。この時、俺はそれぞれの無限級数における極限值（または収束値）が1部とは異なる形で $x > 0$ から $x = 0$ へと近づいていくことを視覚的に確認した。同時に、俺はそれぞれの無限級数が $x = 0$ において収束して収束値（極限值）を取ることを確認した。

5 $n = -2$

$n = -2$ の時、無限級数 $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ は $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \dots$ である。杉山式では、 $1 + 2 + 3 + \dots$ は $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \exp(-k \cdot 0 \cdot \cot(\frac{\pi}{2})) \cos(k \cdot 0)$ である。俺がこの杉山式における k を大きくした時、俺は $\frac{\pi^2}{6}$ が1部とは異なる形で $x > 0$ から $x = 0$ へと近づいていくことを視覚的に確認した。同時に、俺は $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \exp(-k \cdot 0 \cdot \cot(\frac{\pi}{2})) \cos(k \cdot 0)$ が $x = 0$ において $\frac{\pi^2}{6}$ になることを確認した。俺は次の俺の視覚的な予想

$$\lim_{+x \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \exp(-k \cdot 0 \cdot \cot(\frac{\pi}{2})) \cos(k \cdot 0) = \frac{\pi^2}{6}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \exp(-k \cdot 0 \cdot \cot(\frac{\pi}{2})) \cos(k \cdot 0) = \frac{\pi^2}{6}$$

を提示する。 $k = 100$ の時、俺は次の図 26 を獲得した。

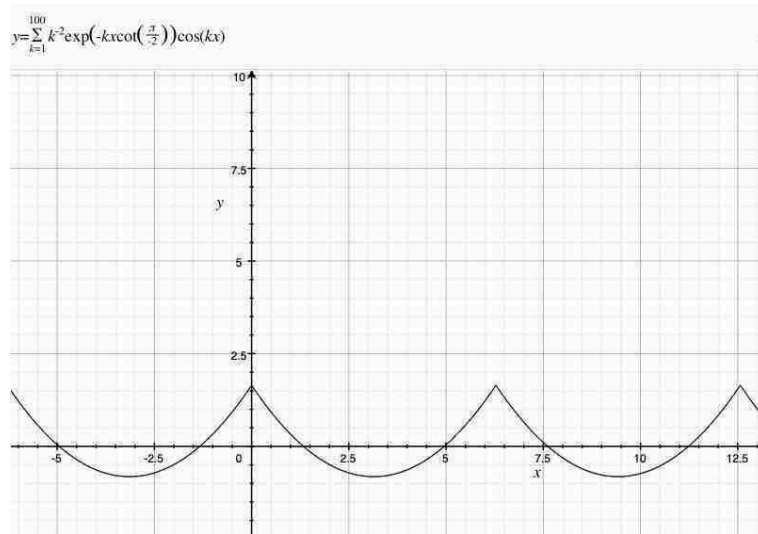


図 26

上記は $0 \leq n$ の時と非常に異なるグラフの形である。俺は $y = \frac{\pi^2}{6}$ を導入する時、俺は次の図 27 を獲得する。

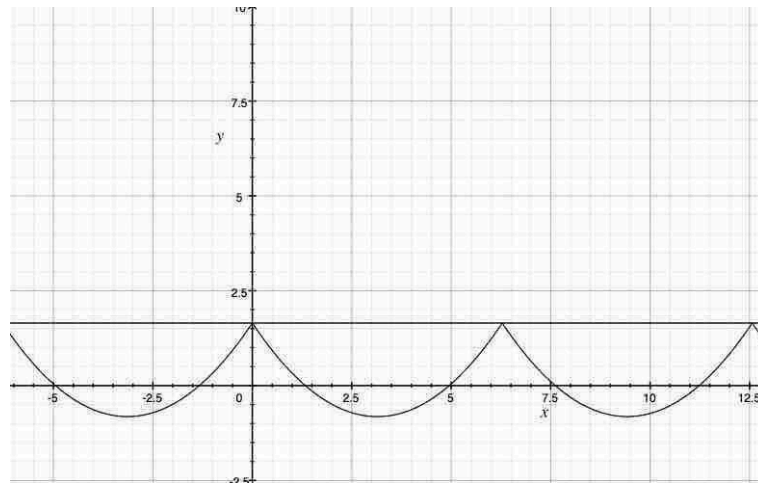


図 27

さらに拡大すると、俺は次の図 28 を獲得する。

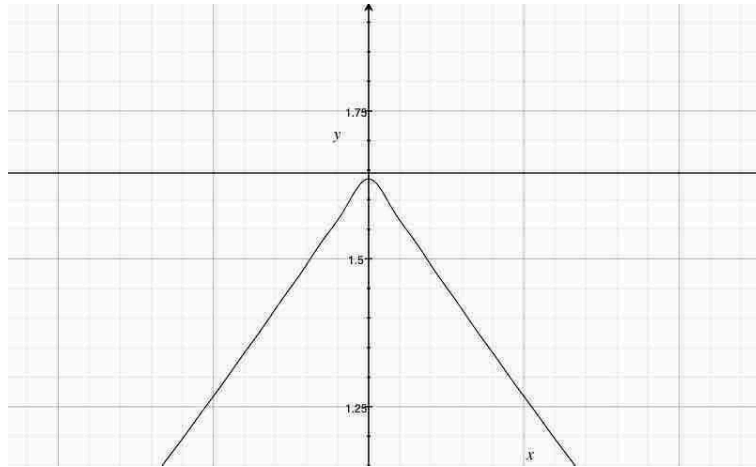


図 28

俺が k を無限に近づけた時、 $\lim_{+x \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{2})) \cos(kx)$ は $\frac{\pi^2}{6}$ に収束しそうである。ただし、 $0 \leq n$ のとき、正確には、 $1 \leq n$ の時と異なり、 $\lim_{+x \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{2})) \cos(kx)$ は $x = 0$ 上で収束している。

それに対して、 $0 \leq n$ のとき、正確には、 $1 \leq n$ の時では、 $\lim_{+x \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{2})) \cos(kx)$ は $x = 0$ で発散して、 $x > 0$ から 0 への収束値(極限值)を持った。 $\lim_{+x \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{2})) \cos(kx)$ は $x = 0$ 上での収束値 ($\frac{\pi^2}{6}$) を持つ一方、 $x > 0$ から 0 への $1 \leq n$ のような収束値を持っていない。当然、俺は $(\frac{\pi^2}{6})$ も $x > 0$ から 0 への収束値と解釈することができる。

6 $n = -3$

$n = -3$ の時、無限級数 $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ は $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} \dots$ である。杉山式では、 $1 + 2 + 3 + \dots$ は $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} \exp(-k \cdot 0 \cdot \cot(\frac{\pi}{4})) \cos(k \cdot 0)$ である。俺がこの杉山式における k を大きくした時、俺は $1.20205\dots$ が 1 部とは異なる形で $x > 0$ から $x = 0$ へと近づいていくことを視覚的に確認した。同時に、俺は $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} \exp(-k \cdot 0 \cdot \cot(\frac{\pi}{4})) \cos(k \cdot 0)$ が $x = 0$ において $1.20205\dots$ になることを確認した。俺は次の俺の視覚的な予想

$$\lim_{+x \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} \exp(-k \cdot 0 \cdot \cot(\frac{\pi}{4})) \cos(k \cdot 0) = 1.20205\dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} \exp(-k \cdot 0 \cdot \cot(\frac{\pi}{4})) \cos(k \cdot 0) = 1.20205\dots$$

を提示する。 $k = 100$ の時、俺は次の図 29 を獲得した。

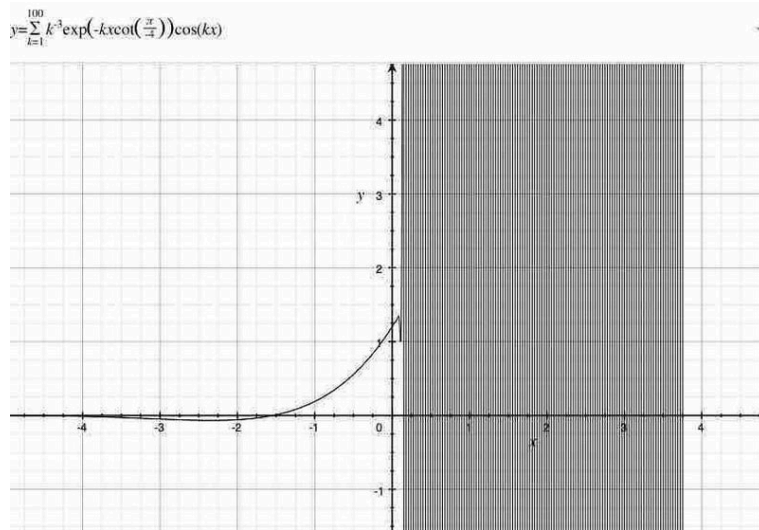


図 29

上記は $0 \leq n$ の時と非常に異なるグラフの形である。俺は $y = 1.20205$ を導入する時、俺は次の図 30 を獲得する。

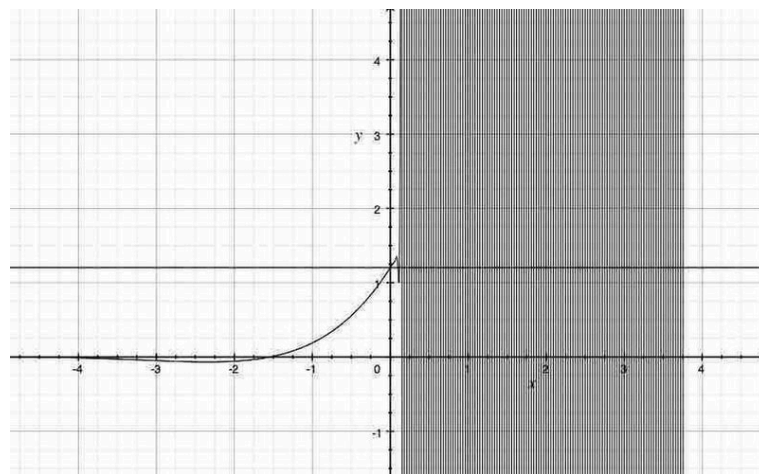


図 30

さらに拡大すると、俺は次の図 31 を獲得する。

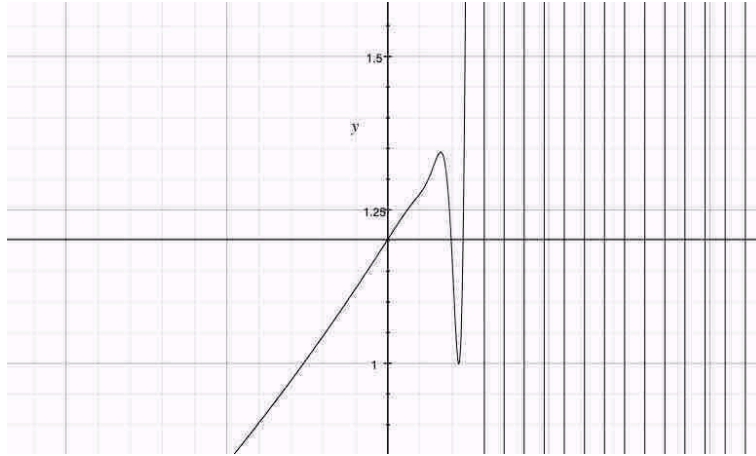


図 31

俺が k を無限に近づけた時、 $\lim_{+x \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{4})) \cos(kx) = 1.20205\dots$ に収束しそうである。ただし、 $0 \leq n$ のとき、正確には、 $1 \leq n$ の時と異なり、 $\lim_{+x \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{4})) \cos(kx) = 1.20205\dots$ は $x = 0$ 上で収束している。

それに対して、 $0 \leq n$ のとき、正確には、 $1 \leq n$ の時では、 $\lim_{+x \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{4})) \cos(kx)$ は $x = 0$ で発散して、 $x > 0$ から 0 への収束値？を持った。ここでは、 $\lim_{+x \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{4})) \cos(kx)$ は $x = 0$ 上での収束値 (1.20205...) を持つ一方、 $x > 0$ から 0 への収束値？を持っていない。当然、俺は 1.20205... も $x > 0$ から 0 への収束値と解釈することができる。

7 $n = -4$

$n = -4$ の時、無限級数 $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ は $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} \dots$ である。杉山式では、 $1 + 2 + 3 + \dots$ は $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} \exp(-k \cdot 0 \cdot \cot(\frac{\pi}{6})) \cos(k \cdot 0)$ である。俺がこの杉山式における k を大きくした時、俺は $\frac{\pi^4}{90}$ が 1 部とは異なる形で $x > 0$ から $x = 0$ へと近づいていくことを視覚的に確認した。同時に、俺は $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} \exp(-k \cdot 0 \cdot \cot(\frac{\pi}{6})) \cos(k \cdot 0)$ が $x = 0$ において $\frac{\pi^4}{90}$ になることを確認した。俺は次の俺の視覚的な予想

$$\lim_{+x \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} \exp(-k \cdot 0 \cdot \cot(\frac{\pi}{6})) \cos(k \cdot 0) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} \exp(-k \cdot 0 \cdot \cot(\frac{\pi}{6})) \cos(k \cdot 0) = \frac{\pi^4}{90}$$

を提示する。 $k = 100$ の時、俺は次の図 32 を獲得した。

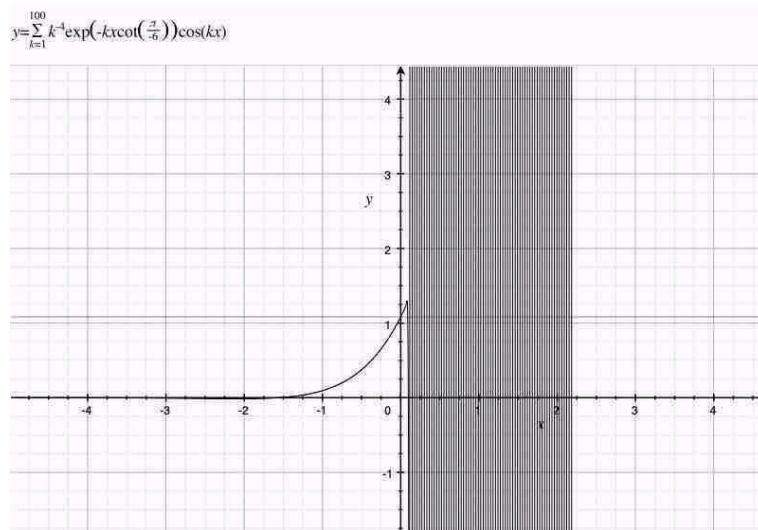


図 32

$y = 1$ の上の薄い直線が $y = \frac{\pi^4}{90}$ である。俺は上記の図の拡大を省略する。

8 $n = -5$

$n = -5$ の時、無限級数 $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ は $\frac{1}{1^5} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} \dots$ である。杉山式では、 $1 + 2 + 3 + \dots$ は $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-5} \exp(-k \cdot 0 \cdot \cot(\frac{\pi}{-8})) \cos(k \cdot 0)$ である。俺がこの杉山式における k を大きくした時、俺は $1.03692\dots$ が 1 部とは異なる形で $x > 0$ から $x = 0$ へと近づいていくことを視覚的に確認した。同時に、俺は $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-5} \exp(-k \cdot 0 \cdot \cot(\frac{\pi}{-8})) \cos(k \cdot 0)$ が $x = 0$ において $1.03692\dots$ になることを確認した。俺は次の俺の視覚的な予想

$$\lim_{+x \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-5} \exp(-k \cdot 0 \cdot \cot(\frac{\pi}{-8})) \cos(k \cdot 0) = 1.03692\dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-5} \exp(-k \cdot 0 \cdot \cot(\frac{\pi}{-8})) \cos(k \cdot 0) = 1.03692\dots$$

を提示する。 $k = 100$ の時、俺は次の図 33 を獲得した。

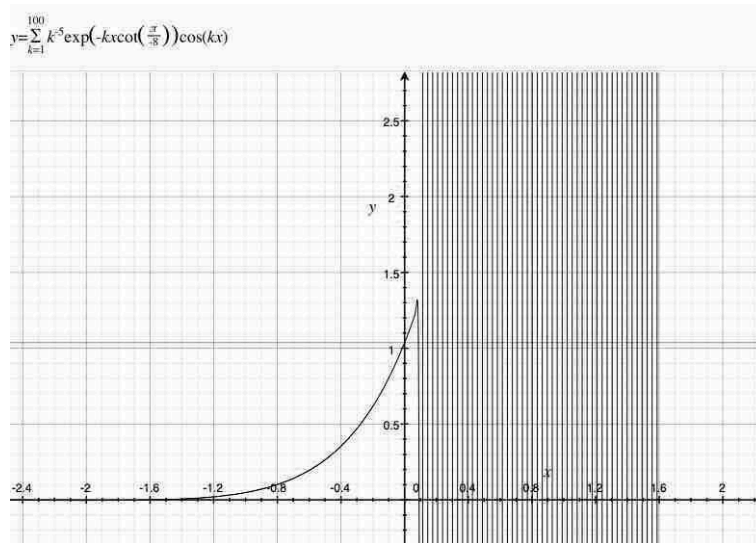


図 33

$y = 1$ の上の薄い直線が $y = 1.03692$ である。俺は上記の図の拡大を省略する。

第 III 部

予想とまとめ

以下では、俺は予想とまとめを提示するつもりである。

9 予想

俺の視覚的な予想 $n \geq 1$ では、

$$\lim_{+x \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{\infty} k^n \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{2n+2})) \cos(kx)$$

は収束値（極限值）を持つ。その時、

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n \exp(-k \cdot 0 \cdot \cot(\frac{\pi}{2n+2})) \cos(k \cdot 0)$$

は無限である。 $n \leq -2$ では、

$$\lim_{+x \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{\infty} k^n \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{2n+2})) \cos(kx)$$

は収束値（極限值）を持つ。その時、

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n \exp(-k \cdot 0 \cdot \cot(\frac{\pi}{2n+2})) \cos(k \cdot 0)$$

は無限でなく、その収束値（極限值）に一致する。

$-2 < n < 1$ では、

$$\lim_{+x \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{\infty} k^n \exp(-kx \cot(\frac{\pi}{2n+2})) \cos(kx)$$

の振る舞いは上記の予想に一致しない。

俺の視覚的な予想 俺が無級数の順序を変えると、無級数の値も異なった。一般的には、足す順序を変えると、値が異なるのは奇妙に感じる。しかし、俺が順序の交換を $\lim_{+x \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{\infty} k \exp(-kx) \cos(kx)$ のような関数の交換（取り替え）と考えるとき、この現象はそれほど不思議でない。俺は関数それ自体を取り替えるので、その取り替えに沿って、 $x > 0$ から $x = 0$ への値も異なるように思える。発散も同様である。例えば、 $1 + 2 + 3 + \dots$ を $1 + 3 + 2 + \dots$ と交換することは杉山式 $\sum_{k=1}^{\infty} k \exp(-kx) \cos(kx)$ を別の異なる式（関数）にすることである。その結果として、 $-\frac{1}{12}$ が $x > 0$ から $x = 0$ へと近づかなくなる。そのため、無級数は別の収束値を取るようになる。

10 まとめ

俺は杉山式を杉山と異なる方法で視覚化した。その結果、俺は無級数において収束値が $x > 0$ から $x = 0$ へと近づいて行く様子を獲得した。同時に、俺は無級数が $x = 0$ で感覚通りに発散することも視覚化した。杉山は k を横軸にとり、 y を縦軸に取った。そして、彼は k を大きくすると、 y が大きな k （項数）において $-\frac{1}{12}$ になることを視覚化した。彼は x を微小な数として取った。それに対して、俺は x を横軸に取り、 y を縦軸に取った。そして、それぞれの n に対して、俺は k を大きくしていった。それぞれの k は一枚のグラフ（図）に対応する。その結果、俺は無級数において収束値、例えば $-\frac{1}{12}$ が $x > 0$ から $x = 0$ へと近づいて行く様子を獲得した。同時に、俺は $1 + 2 + 3 + \dots$ が感覚通りに発散する視覚化も同じ一枚のグラフの中で獲得した。杉山の視覚化では、 $1 + 2 + 3 + \dots$ が無限になり、かつ $-\frac{1}{12}$ になることを視覚化できていない。一方、上記の視覚化では、俺は $1 + 2 + 3 + \dots$ が無限になり、かつ $-\frac{1}{12}$ になることを視覚化した。

俺は複素数や解析接続を使用せずに、俺はある種の無級数が特定の値、例えば $-\frac{1}{12}$ を取ることを視覚化することができた。 $1 + 2 + 3 + \dots$ が $-\frac{1}{12}$ になることを証明するためには、複素数や解析接続の考えが必要であるらしい。しかし、俺の図示では、俺は $1 + 2 + 3 + \dots$ が $-\frac{1}{12}$ と $1 + 2 + 3 + \dots$ が無限になることを直感的に視覚化することができるようになった。つまり、 $1 + 2 + 3 + \dots$ が無限になるのは、 $x = 0$ 上での y の値が無限へと大きくなることであり、 $1 + 2 + 3 + \dots$ が $-\frac{1}{12}$ になるのは、 $x > 0$ から $x = 0$ へと $y = -\frac{1}{12}$ が近づいていくことである。

俺は杉山式を視覚的に意味づけして、 $1 + 2 + 3 + \dots$ が $-\frac{1}{12}$ と $1 + 2 + 3 + \dots$ が無限になることを視覚的に解釈した。杉山のグラフでは、杉山式が $-\frac{1}{12}$ になることのみが視覚化されている。杉山の図示では、杉山は杉山式が $-\frac{1}{12}$ を取ることを確認した。それに対して、俺の図示では、俺は $1 + 2 + 3 + \dots$ が $-\frac{1}{12}$ なることと $1 + 2 + 3 + \dots$ が無限になることを同時に視覚的に意味づけした。俺は $1 + 2 + 3 + \dots$ が $-\frac{1}{12}$ なるのは $-\frac{1}{12}$ が $x > 0$ から $x = 0$ へと近づいていった結果であると視覚的に解釈した。俺は $1 + 2 + 3 + \dots$ が $-\frac{1}{12}$ なるのは無限が $x = 0$ で無限大へと発散した結果であると視覚的に解釈した。その結果、俺は $x = 0$ での発散と $x = 0$ での収束値と $x > 0$ から $x = 0$ への収束値を図示の中で視覚的に発見した。

俺はこの視覚化を一般化して、無級数 $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ のそれぞれの n に関する類似した図示を獲得した。

参考文献

- [1] <https://xseek-qm.net/Regularization.htm>